Corrigé

Soit $f : x \mapsto 2(x-1)\mathrm{e}^{x-1} - x^2$. Résoudre l'équation de l'énoncé revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2x(\mathrm{e}^{x-1} - 1)$. D'après les propriétés de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc $\mathrm{e}^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x > 1$ et finalement $\mathrm{e}^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. De plus, $\mathrm{e}^{1-1} - 1 = 0$. On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{x-1} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$, on constate que la fonction f est strictement négative donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cette intervalle. Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(1) = -1 < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (par croissance comparée) donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cette intervalle donc une unique solution sur $\mathbb{R}$. De plus, à l'aide de la calculatrice, on constate que $f(1,7) < 0$ et que $f(1,8) > 0$. On en conclut que la solution de cette équation appartient à l'intervalle $[1,7 ; 1,8]$.